

Finančna pismenost (FMF Seminar za učitelje matematike)

Tomaž Košir, *Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani*

*UL FMF, Ljubljana
25. september 2026*

- 1 Obrestovanje
- 2 Obveznice
- 3 Zakon ene cene in arbitražna strategija
- 4 Terminalske pogodbe
- 5 Tveganje na finančnih trgih

- 1 Obrestovanje
- 2 Obveznice
- 3 Zakon ene cene in arbitražna strategija
- 4 Terminalske pogodbe
- 5 Tveganje na finančnih trgih

- navadno obrestovanje:

$$A(0, t) = 1 + Rt \text{ in } D(0, t) = \frac{1}{1 + Rt},$$

- diskretno obrestno obrestovanje, k -krat letno:

$$A\left(0, \frac{h}{k}\right) = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^h \text{ in } D\left(0, \frac{h}{k}\right) = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^{-h},$$

pri $k = 1$ govorimo o letnem ali **enostavnem** obrestovanju,

- zvezno obrestovanje:

$$A(0, t) = e^{Rt} \text{ in } D(0, t) = e^{-Rt}.$$

Običajno označimo z Y obrestno mero pri zveznem obrestovanju, imenujemo jo tudi *moč obresti*.

- Zvezno obrestovanje izpeljemo kot limito diskretnega obrestovanja, ko pošljemo $k \rightarrow \infty$ in je nominalna obrestna mera R neodvisna od k . Velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{R}{k}\right)^k = e^R.$$

- Čas t vedno merimo v *letih*.
- Za $t \neq 1$ dobimo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{R}{k}\right)^k \right)^t = e^{Rt}.$$

R , R_k je nominalna obrestna mera pri obrestnem obrestovanju, R_E pripadajoča efektivna obrestna mera.

To je obrestna mera pri enostavnem obrestovanju, za katero sta vrednosti obrestovalnih faktorjev enaki:

$$A(0, t) = (1 + R_E)^t.$$

- pri diskretnem obrestovanju

$$R_E = \left(1 + \frac{R_k}{k}\right)^k - 1,$$

- pri zveznem obrestovanju

$$R_E = e^R - 1.$$

Oznake:

- $R(0, t)$ obrestna mera za transakcije od 0 do t pri diskretnem obrestovanju, včasih $R_k(0, t)$, da poudarimo pogostost obrestovanja,
- $Y(0, t)$ moč obresti za transakcije od 0 do t .

- 1 Obrestovanje
- 2 Obveznice**
- 3 Zakon ene cene in arbitražna strategija
- 4 Terminalske pogodbe
- 5 Tveganje na finančnih trgih

- dospetje T , nominalna vrednost N , premija P , diskontni faktor $D(0, T)$,
- Velja

$$D(0, T) = \frac{P}{N},$$

- (letni) donos obveznice $R(0, T)$:

$$N = P(1 + R(0, T))^T,$$

- donosnost do dospetja $Y(0, T)$:

$$N = P e^{Y(0, T)T}.$$

- dospetje T , nominalna vrednost N , premija P , časi kuponov $t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$, vrednosti kuponov C (ali C_i če spremenljivi), $\Delta = t_i - t_{i-1}$ razmiki med časi kuponov (ali Δ_i če spremenljivi).
- kratkoročne $T \leq 1$, dolgoročne $T \geq 2$, večne obveznice (konzuli).
- $c = \frac{C}{N}$ kuponska obrestna mera, $c' = \frac{c}{\Delta} = \frac{C}{N\Delta}$ nominalna obrestna mera,
- čista cena $Q = P - A$, A akumulirane obesti od zadnjega kupona

$$A = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} C,$$

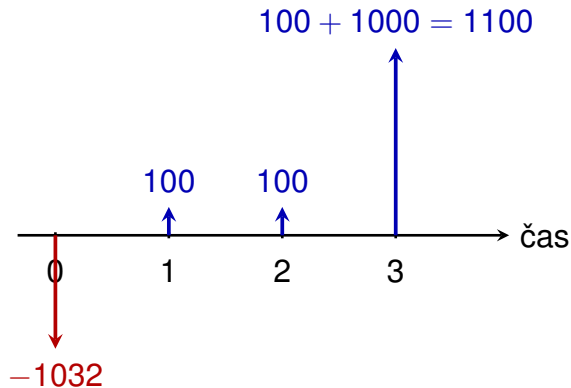
t_0 čas izplačila prejšnjega kupona, t trenutni čas, t_1 čas naslednjega kupona (vsi časi merjeni od izdaje).

- 1 Obrestovanje
- 2 Obveznice
- 3 Zakon ene cene in arbitražna strategija**
- 4 Terminalske pogodbe
- 5 Tveganje na finančnih trgih

- **Zakon ene cene** pravi, da imata dve naložbi oz. investiciji enako začetno vrednost, če so vsi denarni tokovi v prihodnosti enaki za obe naložbi.
- Na primer: Kuponska obveznica in več brezkuponskih obveznic z zapadlostmi ob izplačilu kuponov in nominalnimi vrednostmi enakimi kuponom.
- Dobimo formulo o vrednotenju kuponske obveznice.

Zakon ene cene in kuponska obveznica

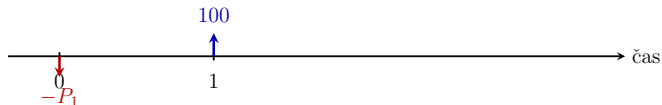
- Kuponska obveznica z letnimi kuponi in $N = 1000$, $C = 100$, $P = 1032$ in $T = 3$. Skica denarnih tokov:



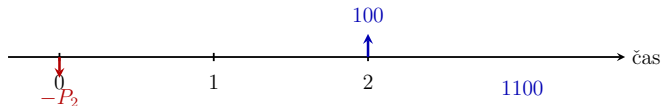
- Bodoče denarne tokove te kuponske obveznice lahko razstavimo na denarne tokove naslednjih brezkuponskih obveznic:
 - 1 brezkuponske obveznice s premijo P_1 , $N_1 = 100$ in $T_1 = 1$,
 - 1 brezkuponske obveznice s premijo P_2 , $N_2 = 100$ in $T_2 = 2$,
 - 1 brezkuponske obveznice s premijo P_3 , $N_3 = 1100$ in $T_3 = 3$.(Lahko bi vzeli npr. tudi 11 brezkuponskih obveznic z $N_4 = 100$ in $T_3 = 3$.)

Denarni tok portfelja brezcuponskih obveznic

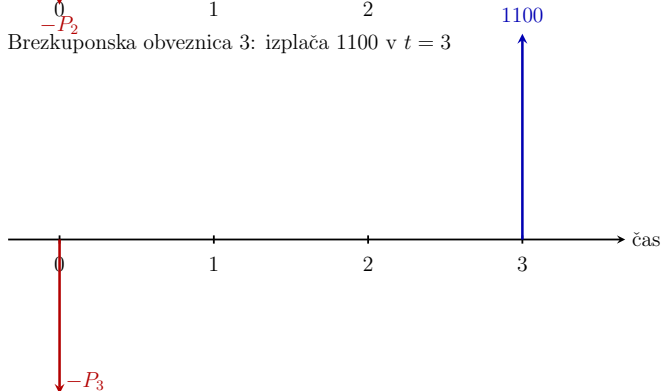
Brezcuponska obveznica 1: izplača 100 v $t = 1$



Brezcuponska obveznica 2: izplača 100 v $t = 2$



Brezcuponska obveznica 3: izplača 1100 v $t = 3$



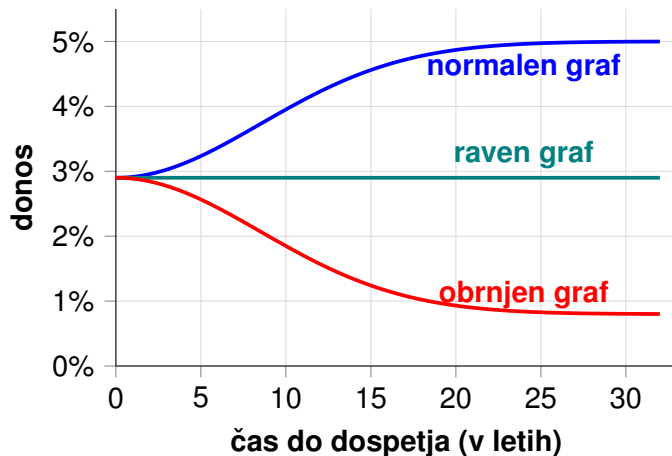
- Bodoče denarne tokove te kuponske obveznice lahko razstavimo na denarne tokove naslednjih brezkuponskih obveznic:
 - ① 1 brezkuponske obveznice s premijo P_1 , $N_1 = 100$ in $T_1 = 1$,
 - ② 1 brezkuponske obveznice s premijo P_2 , $N_2 = 100$ in $T_2 = 2$,
 - ③ 1 brezkuponske obveznice s premijo P_3 , $N_3 = 1100$ in $T_3 = 3$.
(Lahko bi vzeli npr. tudi 11 brezkuponskih obveznic z $N_4 = 100$ in $T_3 = 3$.)
- Zaradi zakona ene cene mora veljati

$$\begin{aligned} 1032 = P &= P_1 + P_2 + P_3 \\ &= 100 D(0, 1) + 100 D(0, 2) + 1100 D(0, 3). \end{aligned}$$

- Podobno dobimo splošno formulo za vrednotenje kuponske obveznice

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} C_i D(0, t_i) + (N + C_n) D(0, T).$$

Krivulje donosov $R(0, t)$



- **Arbitražna priložnost** je naložba, ki ima začetno vrednost enako 0 v prihodnosti pa imamo samo nenegativne denarne tokove in vsaj v enem primeru pozitiven denarni tok.
- V finančnem žargonu rečemo, da imamo **zastonj kosilo**. Predpostavka o neobstoju arbitraže je potem predpostavka, da ni zastonja kosila.

- Imamo dve stavnici, ki sprejemata stave za izid tekme v košarki med moštvoma Koš in Lob.
- Stavnica A sprejema stave v razmerju 5 : 5 (oz. 2 : 2) in stavnica B v razmerju 6 : 4 (oz. 1,67 : 2,5).
- Stavnica A tako za 5 vplačanih enot v primeru zmage izbranega moštva izplača 10 enot, v primeru njegovega poraza pa 0 enot.
- Stavnica B za 6 vplačanih enot na zmago moštva Koš izplača 10 enot v primeru zmage tega moštva in 0 enot v primeru poraza. V primeru stave na moštvo Lob pa za 4 vplačane enote izplača 10 enot v primeru zmage tega moštva in 0 v primeru poraza.

Naslednja strategija je arbitražna:

- Dijak si od očeta izposodi 9 denarnih enot in mu obljubi, da jih bo po tekmi vrnil.
- Nato vplača 5 denarnih enot na zmago moštva Koš v stavnici A in 4 denarne enote na zmago moštva Lob v stavnici B.
- Po tekmi bo v primeru zmage moštva Koš dobil izplačilo 10 enot iz stavnice A in 0 iz stavnice B.
- V primeru zmage moštva Lob pa bo dobil 10 denarnih enot iz stavnice B in 0 iz A.
- V vsakem primeru bo lahko očetu vrnil 9 enot, 1 enota pa bo njegova brez vloženih sredstev.

Menjalnici A v New Yorku in B v Londonu sta 19. julija 2002 objavili naslednje menjalne tečaje:

menjalnica A	nakupni	prodajni
1,0000 EUR	1,0202 USD	1,0284 USD
1,0000 GBP	1,5718 USD	1,5844 USD
menjalnica B	nakupni	prodajni
1,0000 EUR	0,6324 GBP	0,6401 GBP
1,0000 USD	0,6299 GBP	0,6375 GBP

Npr. menjalnica A kupi 1 EUR za 1,0202 USD in ga proda za 1,0284 USD.

Arbitražna strategija je bila možna:

- Za zelo kratek čas si izposodimo 100 USD.
- V A kupimo funte,
- nato v B za funte kupimo evre,
- končno evre v A zamenjamo za dolarje, in vrnemo dolg.
- Velja

$$\frac{100}{1,5844} \cdot \frac{1}{0,6401} \cdot 1,0202 = 100,59.$$

- Na koncu nam ostane 59 centov.

- Določi razne vrednosti količin, ki nastopajo v formuli za vrednotenje obveznic, če imaš danih dovolj podatkov.
- Določi donosnosti do dospetja, če imaš danih nekaj vrednosti kuponskih (ali brezkuponskih) obveznic.
- Preveri ali obstaja arbitraža, če imaš dane cene za nekaj obveznic. Določi arbitražno strategijo, če obstaja arbitraža.
- Naloge o t.i. ljudskih obveznicah, ali državnih obveznicah (dolgoročne obveznice) in državnih menicah (kratkoročne obveznice).

- 1 Obrestovanje
- 2 Obveznice
- 3 Zakon ene cene in arbitražna strategija
- 4 Terminalske pogodbe**
- 5 Tveganje na finančnih trgih

Terminski pogodba je dogovor med dvema strankama, s katerim se dogovorita o *ceni*, po kateri bo ena stranka drugi prodala določeno blago ali vrednostni papir na določen *dan v prihodnosti*.

S terminsko pogodbo si zagotovimo ceno **osnovnega vrednostnega papirja ali blaga** na točno določen dan v prihodnosti.

Terminska pogodba je primer **izvedenega finančnega instrumenta**.

- Energetsko podjetje si želi zagotoviti ceno za nakup 1000 sodčkov nafte čez tri mesece.
- Na borzi danes sklene terminsko pogodbo za nakup 1000 sodčkov nafte z izročilno ceno 92 USD za sodček in zapadlostjo $T = \frac{1}{4}$.
- Konec decembra bo za 1000 sodčkov nafte plačalo 92.000 USD.

- Ste lastnik ene delnice podjetja Pekarna d.d., katere trenutna cena je 100 EUR.
- Želite skleniti terminski pogodbo za prodajo delnice čez eno leto. Kaj s tem izgubite?
- Če delnico takoj prodate in denar naložite na banko, boste čez eno leto imeli 100 EUR in obresti.
- Če je obrestna mera 5%, boste imeli 105 EUR.
- Izročitvena cena mora biti 105 EUR. Sicer obstaja arbitraž.
- Kaj pa če veste, da bo Pekarna d.d. izplačala dividendo v višini 3 EUR tik pred iztekom enega leta?
- Potem mora biti izročitvena cena $100 + 5 - 3 = 102$ EUR.
- **Pozor: Tu smo zanemarili stroške.**
- Ker boste delnico v $T = 1$ prodali, ste v pogodbo *kratka stran*. Kupec pogodbe pa je *dolga stran*.

- Zakaj mora (v idealiziranem modelu) biti izročitvena cena $K = 105$ EUR?
- Če bi bil K manjši od 105, denimo $K = 104$, potem je arbitražna strategija naslednja:
 - Danes ($t = 0$):
 - 1 Sklenemo terminsko pogodbo za nakup ene delnice čez eno leto za 104 EUR.
 - 2 Sposodimo si in prodamo eno delnico Pekarne d.d. (to je t.i. *kratka prodaja*).
 - 3 Dobljeni denar (100 EUR) naložimo na bančni račun.
 - 4 Skupni denarni tok je 0 EUR, dolžni smo eno delnico.
 - Čez eno leto ($t = 1$):
 - 1 Dvignemo denar z bančnega računa. Imamo 105 EUR.
 - 2 S terminsko pogodbo lahko kupimo delnico za 104 EUR.
 - 3 Vrnemo izposojeno delnico.
 - 4 Denarni tok je: $105 - 104 = 1$. Ostane nam 1 EUR arbitražnega zaslužka.

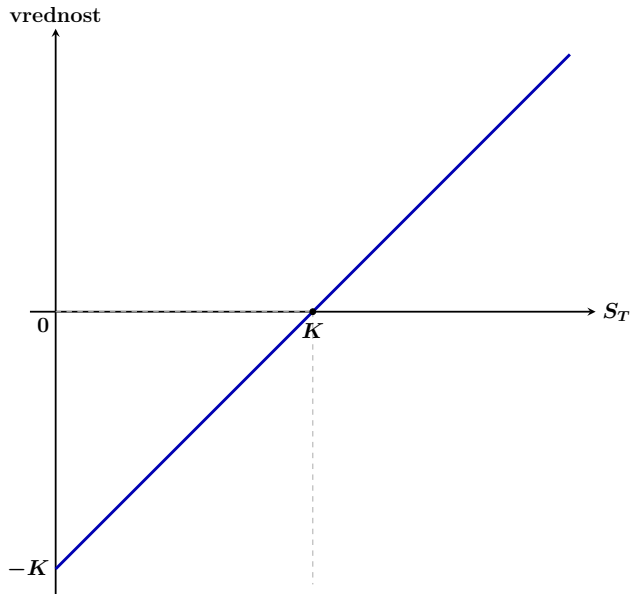
- K - izročitvena cena,
- T - čas izročitve,
- S_t - cena osnovnega premoženja (npr. delnice) v času $t \in [0, T]$,
- F_t - izročitvena cena za terminsko pogodbo sklenjeno v času t , $F_0 = K$,
- R - netvegana (efektivna) obrestna mera, ki je na voljo na trgu za vse zapadlosti. **Privzetek: Je konstantna.**
- Če ni dividend: $K = S_0(1 + R)^T$,
- Če ni dividend: $F_t = S_t(1 + R)^{T-t}$,
- Znana dividenda I_{t_0} v t_0 : $K = S_0(1 + R)^T - I_{t_0}(1 + R)^{T-t_0}$,
- Znana dividenda I_{t_0} , $t_0 > t$: $F_t = S_t(1 + R)^{T-t} - I_{t_0}(1 + R)^{T-t_0}$.

Vrednost terminske pogodbe za kupca (dolgo stran)

- Če je cena osnovnega premoženja v času T večja kot izročitvena cena, smo s tem zaslužili oz. prihranili.
- Če pa je cena osnovnega premoženja v času T manjša kot izročitvena cena, imamo izgubo.

$$V_T = S_T - K = S_T - F_0.$$

Vrednost terminske pogodbe za kupca - 2



- Vrednost terminskega pogodbe (sklenjene v času 0) je za dolgo stran (kupca) v času $t \in (0, T)$ enaka razliki med izročitveno ceno (F_t), ki velja v času t in izročitveno ceno zagotovljeno v času 0 (tj. K); ker pa se ti dve vrednosti nanašata na čas T , ju moramo diskontirati. Ta vrednost je tudi enaka razliki med trenutno (tržno) vrednostjo osnovnega premoženja in diskontirano izročitveno ceno:

$$V_t = (F_t - K) \cdot (1 + R)^{-(T-t)} = S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}.$$

Zadnja enakost velja, ker je $F_t = S_t(1 + R)^{T-t}$.

- Izračunajmo vrednost terminske pogodbe za nakup nafte čez 3 mesece.
- Če bo vrednost sodčka nafte konec decembra 100 USD, potem bo vrednost terminske pogodbe za naftno družbo

$$1.000 \cdot (100 - 92) = 8.000 \text{ USD.}$$

- Če bo pa vrednost sodčka nafte takrat 90 USD, potem bo pa njena vrednost

$$1.000 \cdot (90 - 92) = -2.000 \text{ USD.}$$

- V primeru Pekarne d.d. predpostavimo, da delnica izplača 3 EUR dividenda tik pred enim letom. Zato je $K = 102$ EUR.
- Recimo, da je cena delnice čez eno leto enaka 103 EUR.
- Potem je vrednost terminske pogodba za nas (kratka stran, prodajalca delnice) enaka $K - S_1 = -1$ EUR.

- Določi razne vrednosti količin, ki nastopajo v formuli za vrednost terminske pogodbe, če imaš danih dovolj podatkov.
- Preveri ali obstaja arbitražna, če imaš danih nekaj vrednosti, ki se nanašajo na terminsko pogodbo in osnovni vrednostni papir. Določi arbitražno strategijo, če obstaja arbitražna.
- Terminska pogodba, katere osnovno premoženje je obveznica (kombinacija obeh tem - obveznic in terminskih pogodb).
- Terminske pogodbe na blago, stroški skladiščenja (= 'negativna dividenda').

- Večinoma terminske pogodbe lastniki poračunajo (zaprejo) pred dospeljem.
- Šale na račun pozabljenih trgovalcev - 'krave na Wall Streetu'.
- Omogočajo trgovanje z vzvodom: Vrednosti so razlike med trenutnimi cenami in izročitvenimi cenami.
- Negativna izročitvene cena: za nafto ob začetku epidemije Covid-19.
- Vrednost terminske pogodbe ob izročitvi je lahko pozitivna ali negativna (je linearen finančni instrument).
- Opcije so finančni instrumenti, ki omogočajo izročitev (rečemo izvršitev) samo v primeru, ko je ta za dolgo stran pozitivna. Opcije niso več linearen finančni instrument.
- Modeli za vrednotenje opcij so temelj finančne matematike v (ožjem pomenu).

- 1 Obrestovanje
- 2 Obveznice
- 3 Zakon ene cene in arbitražna strategija
- 4 Terminalske pogodbe
- 5 Tveganje na finančnih trgih**

- Osnovni namen izvedenih finančnih instrumentov je zmanjšanje tveganj na finančnih trgih.
- Terminalske pogodbe zagotavljajo cene v bodočnosti, opcije preprečujejo padec vrednosti, itd.
- Modeli za vrednotenje opcij nam dajo tudi metodo, s katero smo sposobni pokriti tvegane bodoče finančne obveznosti.
- Vendar: Ker izvedeni finančni instrumenti omogočajo trgovanje z vzvodom, so lahko tudi zelo tvegani.

Nekaj znanih primerov velikih finančnih izgub

- 1994 - Orange County: izguba prek 2.000.000 USD. Finančnik Robert Citron je trgoval z izvedenimi finančnimi instrumenti, katerih donos je bil velik pri visokih obrestnih merah. To se je spremenilo, ker so obrestne mere padle. County je dokaj hitro pokrila izgubo z manj tveganimi vlaganji v finančne instrumente.
- 1995 - Barings Bank: izguba okoli 1.000.000 USD. Trgovalec Nick Leeson v Singapurju je trgoval z izvedenimi finančnimi instrumenti na Japonski indeks Nikkei225. Banka je propadla.
- 2008 - Banka Société Générale: izguba več kot 7.000.000 USD. Trgovalec Jérôme Kerviel je trgoval z izvedenimi finančnimi instrumenti na delniške indekse. Banka je pokrila izgubo.
- 2011 - Banka UBS: izguba približno 2.300.000 USD. Trgovalec Kwaku Adoboli trgoval z izvedenimi finančnimi instrumenti na delniške indekse. Banka je pokrila izgubo.